



## CONTROL ROBUSTO NO LINEAL PARA UN FOTOBIOREACTOR EN PRESENCIA DE DISTORSIONES PARAMÉTRICAS

### NONLINEAR ROBUST CONTROL FOR A PHOTOBIOREACTOR IN PRESCENCE OF PARAMETRIC DISTURBANCES

A.E. Rodríguez-Mata<sup>1\*</sup>, J.A. Torres-Muñoz<sup>2</sup>, A.R. Domínguez-Bocanegra<sup>3</sup>, G. Flores<sup>4</sup>, G. Rangel-Peraza<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Tecnológico Nacional de México- Instituto Tecnológico de Culiacán, Sinaloa, México.

<sup>2</sup>Departamento de Control automático, Cinvestav, México, D.F.

<sup>3</sup>Departamento de biotecnología y bioingeniería, Cinvestav, México, D.F.

<sup>4</sup>Laboratorio de Percepción y Robótica, Centro de investigación en Óptica, León Guanajuato, México. .

Recibido 21 de abril de 2016; Aceptado 12 de julio de 2016

#### Resumen

En este trabajo se presenta un algoritmo de tipo control no lineal proporcional-integral (PI) para estabilizar la dinámica de un sistema biológico fotosintético. Además se presenta el modelo matemático del fotobioreactor considerando las incertidumbres de modelado. Dada la fuerte sensibilidad de los parámetros de este tipo de sistemas, el control es una tarea difícil. En este manuscrito se presenta una forma de plantear un problema de seguimiento de trayectoria óptima mediante una ley de control robusta en presencia de distorsiones paramétricas y se extiende este análisis a un fotobioreactor con una cinética de crecimiento de tipo Monod. Se obtiene un nuevo método de sintonización de control PI para sistemas con ciertas propiedades analíticas como las mostradas por los fotobioreactores, para poder alcanzar estabilidad última acotada y poder calcular una bola de convergencia finita. Lo anterior se prueba mediante funciones de convergencia de Lyapunov, con las cuales se obtienen las condiciones de diseño y posteriormente se valida mediante un estudio numérico extraído de la experimentación de un cultivo de *Spirulina maxima* en un fotobioreactor continuo para el tratamiento de aguas residuales.

**Palabras clave:** control de fotobioreactores, microalgas, robustez, incertidumbre.

#### Abstract

This paper presents a robust-PI control applied to a photosynthetic biological system with unknown disturbances presented in its modeling. It is well known that the control of biological process presents several difficulties due to the sensitivity of the biological system parameters, making the control task an interesting problem to solve. An optimal tracking control strategy together with a robust control is proposed to solve the aforementioned problem. The presence of unknown elements and input disturbance were also considered on the control design. In order to prove stability results, Lyapunov techniques were utilized. A new control tuning strategy for systems with stable properties was developed. This control strategy was validated through an experiment using a culture of *Spirulina maxima* in a continuous photobioreactor for wastewater treatment.

**Keywords:** photobioreactor control, microalgae, robustness, disturbance.

## 1 Introducción

Dada la alta tasa de crecimiento de los seres humanos se necesita incrementar de manera inmediata la calidad y cantidad de productos de origen biológico tales como alimentos, medicinas y productos biodegradables; así como aumentar la calidad de vida, incluso de encontrar formas de compensar el creciente deterioro ambiental (Travieso y col., 2004; Domínguez y col., 2009; Ruiz-Leza, 2007). En los últimos años

se ha estudiado de manera ardua a las microalgas. Este tipo de microorganismos presentan excelentes propiedades fisicoquímicas, lo que les permite ser una excelente fuente de alimento. Asimismo, son utilizados para la obtención de metabolitos con usos en la industria farmacéutica. Las microalgas se presentan como una fuente potencial de compuestos bioactivos para ser utilizado en la industria alimentaria

\* Autor para la correspondencia. E-mail: Arodriguez@itculiacan.edu.mx

generando alimentos funcionales. El desarrollo y búsqueda de alimentos funcionales, como método para mejorar y mantener la salud representa un campo de la investigación muy explorado en años recientes. Lípidos, proteínas, polisacáridos, compuestos fenólicos, carotenoides, entre otros bioproductos proveniente de microalgas pueden ser utilizados como fuente de ingredientes para productos funcionales, sin embargo, la inestabilidad química de muchos de ellos puede comprometer su acción. (Ramírez-Merida y col., 2015). Las microalgas, pertenecen a un grupo prometedor de microorganismos que merecen una atención considerable en vista de la amplia gama de procesos biotecnológicos en los cuales podrían estar involucrados. También tienen una importante aplicación en la bioremediación de aguas residuales, dado que los desperdicios agroindustriales y domésticos constituyen uno de los problemas más graves a resolver, debido a que miles de industrias vierten sus residuos a cuerpos de agua subterráneos, ríos y lagos (Pauw N. y col., 1994 y Notie. J. y col., 1994). Un caso típico de esto es el famoso “Río de los Remedios” ubicado en el municipio de Ecatepec, Estado de México, México, el cual atraviesa alrededor de 60 km de zona urbana, lo que intensifica la gravedad del problema, ya que estos residuos, además de contaminar el río, generan malos olores, provocando enfermedades de tipo respiratorio y gastrointestinal entre los habitantes que viven alrededor del río (Domínguez y col., 2009). La contaminación del ambiente con materiales tóxicos surge como resultado de actividades humanas, principalmente industriales, sin embargo, fuentes como la agricultura y la eliminación de residuos también contribuyen a dicho problema (Cañizares y col., 2004). La incorporación de microalgas en sistemas productivos de industrias de alimentos proporciona algunas ventajas ya que el carácter natural, fácil cultivo, su rápido crecimiento (para muchas de las especies) y la posibilidad de controlar la producción de algunos compuestos bioactivos mediante la manipulación de las condiciones de cultivo, hace que las microalgas puedan ser consideradas como auténticos reactores naturales, en algunos casos, una buena alternativa a la síntesis química de ciertos compuestos, (Ramírez-Merida y col., 2015).

Por otro lado la microalga *Spirulina maxima* es una cianobacteria filamentosas no diferenciada, habitante de lagos alcalinos que se cultiva para consumo humano debido a su contenido nutricional (Notie y col., 1994; Domínguez y col., 2009). En los últimos años se le han atribuido diversos

efectos positivos en el tratamiento de algunos tipos de alergias, anemia, cáncer, enfermedades virales y cardiovasculares. Muchas de sus propiedades son consecuencia de pigmentos como las ficobiliproteínas y los carotenoides, así como de otros compuestos como polisacáridos, ácidos grasos (destacando el ácido gamma linoleico), proteínas vitaminas y minerales. Las propiedades y aplicaciones de este organismo hacen de él un alimento promotor de la salud o nutraceutico (Raposo y col., 2013). El cultivo intensivo de microalgas ha sido posible en gran medida debido al desarrollo de nuevos diseños de fotobioreactores. El control de las variables que limitan su productividad, como la intensidad de luz, fotoperiodos, el pH del sistema, la concentración de nutrientes, entre otros, han permitido incrementar la densidad celular en los sistemas autótrofos en los sistemas de producción industrial (Oswald, 2001).

Por lo anterior, el cultivo y control de este tipo de organismos en diferentes tipos de bioreactores ha sido un reto científico e industrial. Se sabe que el uso de éstos, muchas veces es desarrollado al aire libre, debido a que los bioreactores abiertos, como es el caso de cultivo de microalgas, son mayoritariamente utilizados en el tratamiento de aguas residuales (Oswald, 2001; Pauw y col., 1994). La operación de éstos no es una tarea fácil, ya que la simple dinámica microbiana tiene un comportamiento altamente no lineal. Otra dificultad es la falta de robustez en el ambiente de trabajo de aguas residuales, es decir, la constante interferencia de perturbaciones debidas a diferentes razones tales como: distribución no uniforme de los contaminantes y sustratos, los gradientes de temperatura, y la mala distribución de la luz para el caso de los procesos fotosintéticos de bioremediación. Los fotobioreactores de vidrio no son la respuesta ni la salida para aumentar la producción de biomasa microalgal. Sin embargo el diseño de nuevos sistemas, así como mejoras en la geometría del fotobiorreactor si permite dar una salida a la mejora de productividad celular, (Ramírez-Mérida, 2015).

Desde el punto de vista de la teoría de control, el cultivo fotosintético de microalgas es un problema muy fuerte a resolver (Bernard, 2011). Por más de 10 años se ha estudiado el control de sistemas biológicos de manera muy intensa, se han propuesto controladores del tipo linealizantes, predictivos, adaptables, neuronales y óptimos (Bulsari y col., 1995; Batin y col., 1990; Latrillee y col., 1994). Muchos de estos tipos de control son difíciles de llevar a cabo en un proceso tiempo real debido a su complicada estructura y al poder computacional requerido (Lee. y

col., 1999; Johnson y col., 1987; Hussain y col., 1999). En el caso de los sistemas adaptables se necesitan cumplir condiciones de excitación persistente, la cual en sistemas biológicos no siempre es posible alcanzar (Batin y col., 1990). El control óptimo y linealizante plantea el hecho de que se conoce por completo el modelo matemático del sistema, lo cual es muy difícil de obtener para el caso de sistemas biológicos autótrofos (Domínguez y col., 2009).

En este artículo se plantea el diseño de un control no lineal integral, del cual se sabe presenta excelentes resultados en la regulación y seguimiento de sistemas no lineales con dinámica lenta, como lo son los sistemas biológicos o químicos (Aguilar y col., 2004; Alvares y col., 1986; Álvarez-Ramírez y col., 2000; Aguilar y col., 2001; Schaum y col., 2012). Se sabe que los controladores de tipo PI han dado excelentes resultados en cumplir el objetivo de mantener estable un proceso químico o bioquímico, no obstante el problema radica en una buena sintonización del mismo. En este trabajo se plantea el problema desde la teoría de estabilidad, donde a través de un análisis teórico se obtiene una nueva forma de sintonización de un control robusto para el seguimiento de trayectoria en un fotobioreactor con incertidumbre, donde se obtienen condiciones de cota última de estabilidad. Se plantea una aplicación numérica con una ley de control PI no lineal, como la mostrada en (Alvares y col., 1986; Álvarez y col., 1990; Sánchez, y col., 1989). Dicha aplicación será efectuada sobre un modelo de un fotobioreactor isotérmico continuo, que tiene como sustrato una planta de tratamiento de aguas residuales.

## 2 Descripción de la planta y planteamiento del problema

El modelado de sistemas es uno de los problemas más estudiados por la ciencia en la actualidad, ya que los modelos son abstracciones de la realidad, con los cuales los seres humanos interpretamos de una manera no completa la realidad. Un bioreactor es un sistema regulado biológicamente, activo y en donde se llevan a cabo complicados procesos bioquímicos, en los cuales se involucran organismos vivos presentes a largo de todo el proceso. Una manera adecuada para generar un modelo biológico global y no estructurado es realizar un balance global de materia, es decir la acumulación de materia es igual a la generación de la misma sustraída del consumo de energía en el proceso de crecimiento celular. Tomando en cuenta los cambios incrementales de biomasa  $x_1(t)$  y del sustrato



Fig. 1. Bioreactor en presencia de intensidad luminosa.

(alimento o fuente de energía para la población celular a cultivar)  $x_2(t)$ . La razón de crecimiento está caracterizada por el término  $\mu(x_2, I)$ , éste suele estar en función de la concentración de sustrato y de la cantidad de luz provista al sistema, esta última para el caso específico de un fotobioreactor. La razón de crecimiento estará en función de la cantidad de sustrato disponible en el proceso, lo cual nos lleva al famoso modelo matemático de Maltus, pero cuando la cantidad de sustrato es variable y a su vez esta depende de más de una variable el modelo usualmente más socorrido es el modelo matemático de Monod, ya que este representa de una manera más simple en la representación de la dinámica de crecimiento biológico. Dicho modelo es descrito por la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu(I(x), s)x - u(t)x \\ \dot{s} &= -\frac{1}{a_3}\mu(I(x), s)x - u(t)(s - a_4) \\ \dot{I} &= \kappa(x, I_0) \\ \mu(I(x), s) &= \frac{a_1(I(x))s}{a_2(I(x)) + s} \end{aligned} \quad (1)$$

Donde  $a_1(I)$  es el parámetro de crecimiento exponencial máximo el cual está en función de las condiciones de luminosidad y diseño del fotobioreactor. Este parámetro variable está en función directa de la intensidad luminosa promedio (ver: Bernard, 2011) y se presenta unidades  $\text{h}^{-1}$ ;  $a_2$  es la constante de saturación de Monod como  $\text{mg/Lm}$ ;  $a_3$  es la constante de digestión metabólica del microorganismo;  $a_4$  representa la concentración de sustrato en la entrada de alimentación del fotobioreactor en fase continua (Monod, 1950).

La dinámica de la variable  $I(t)$  representada solución de  $\dot{I} = \kappa(x, I_0)$  denota la dinámica variable intensidad luminosa (lux) es un parámetro fuertemente perturbable, razón por la cual se propone en este trabajo utilizar la tasa de dilución  $u(t)$  como variable directa de control y compensar las distorsiones dinámicas debidas al cambio de  $I(x)$  dentro del lazo de cerrado de  $u(t)$  y ver a la variable de intensidad luminosa como una distorsión al sistema.

Por otro lado para objetivos del diseño del control robusto se propone la hipótesis en la cual se supone una relación proporcional entre la tasa de crecimiento exponencial máxima y la constante de saturación con la intensidad luminosa promedio, esto con el objetivo de diseñar un control robusto en base a la tasa de dilución y de esta forma poder rechazar las perturbaciones sobre el sistema representadas totalmente en el cambio paramétrica del sistema:

$$a_1 = a_{1,nom} + d_1(t, I) \text{ y } a_2 = a_{2,nom} + d_2(t, I).$$

Donde  $d_i(t)$  son cambios paramétricos en el tiempo en base a las perturbaciones lumínicas sobre el sistema y las  $a_{i,nom}$  son parámetros constantes en base al modelo matemático extraído de resultados experimentales bajo condiciones controladas de luminosidad, pH, temperatura y presión. Cabe señalar que para este tipo de modelos matemáticos es fácil ver que cualquier tipo de perturbación sobre los parámetros denotaría una perturbación dinámica en base a un producto de  $x(t)$  razón por la cual esta puede ser factorizada con la tasa de dilución  $u(t)$ . Para una función  $f(a, I(t))$  acotada desconocida el fotobioreactor representado sobre la Ec. (1), denotando así la relación entre distorsiones paramétricas y distorsiones sobre la entrada, las cuales tienen exactamente las mismas propiedades para este tipo de sistemas no lineales:

$$\dot{x} = (u(t) + f(a_i, I(t)))x + \mu(I(x), s)$$

En base a lo planteado anteriormente puede ser representado de la siguiente forma reducida:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{a_{1,nom}sx}{a_{2,nom} + s} - u(t)x + \delta(t, I) \\ \dot{s} &= -\frac{1}{a_3} \frac{a_{1,nom}sx}{a_{2,nom} + s} - u(t)(s - a_4) + \delta(t, I) \\ \delta(t, I) &= f(a, I(t))x \end{aligned}$$

Es claro que el modelo se apoya en la hipótesis de que existe una relación lineal entre el crecimiento exponencial de la biomasa y el consumo de sustrato.

Tabla 1. Parámetros de Monod del Cultivo de *Spirulina maxima* (Domínguez y col, 2009)

	Nominal	1	2
$\mu_{max} (a_1 : h^{-1})$	0.027	0.023	0.029
$K_s(a_2: mg/L)$	25	9.82	32.5

Un fotobioreactor en fase continua impone incluir las cantidades asociadas al flujo de entrada y salida la cual es llamada razón de dilución, la cual tiene que ser óptima para poder garantizar una producción ideal. Esta última ha sido estudiada de manera amplia en la literatura, se ha encontrado una relación matemática para optimizar la concentración de biomasa a través de dicha razón de dilución.

Para el caso de un modelo matemático que represente un proceso fotosintético, dicha sensibilidad paramétrica se verá reflejada en función de la intensidad luminosa como se ha mencionado anteriormente, todo esto observarse en un incremento de ecuaciones diferenciales y parámetros, como el mostrado en donde fue posible obtener un modelo matemático de un proceso fotosintético; cabe señalar que controlar dicho modelo desde un punto de vista analítico, es una fuerte tarea dada su gran complejidad.

En estudios anteriores se ha podido demostrar dicha alta sensibilidad paramétrica en el cultivo de microorganismos como los mostrados en la Tabla 1 donde para prácticamente el mismo proceso, el conjunto de parámetros de Monod fue relativamente grande, lo cual puede sumar fuertes problemas en un diseño de un control de estados en dicho sistema. Razón por la cual utilizaremos dichos datos obtenidos de la literatura para probar, en la sección de simulación y diseño del control, para un fotobioreactor en el cultivo de microalga *Spirulina maxima*.

### 3 Resultados principales

Dada la problemática expuesta anteriormente, se debe diseñar así un control no lineal robusto a cambios o distorsiones sobre el sistema. Sea el siguiente sistema dinámico no lineal perturbado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= f(x_p) + g(x_p)u_p + \delta(t, x_p) \\ y_p &= Cx_p \end{aligned} \tag{2}$$

Donde las funciones  $\|f(x_p)\| \leq f_{max}$  y  $\|g(x)\| \leq g_{max}$   $f_{max}, g_{max} \geq 0$  son funciones acotadas. La función  $\delta(t, x_p)$  es una distorsión debida al mal conocimiento del sistema y es una perturbación

presente en la entrada. Muchas veces se requiere que un sistema mantenga un comportamiento idóneo a lo largo del tiempo, es decir que el sistema tenga el comportamiento óptimo y libre de distorsiones. Esto también se puede ver como un problema de seguimiento de trayectoria, con otras palabras el problema de diseñar una ley robusta de control para que nuestro sistema mantenga un comportamiento idóneo a lo largo del tiempo, y así poder mantener en cada instante la dinámica de otro sistema ideal, aún en presencia de perturbaciones como las mostradas en la Ec. (2). Por lo que se propone la siguiente planta de seguimiento:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (3)$$

Para poder diseñar una ley de control para esta clase de sistemas no lineales, en particular los procesos químicos y biológicos que compartan algunas propiedades dinámicas *a priori*, se requerirá que éstos cumplan algunas suposiciones:

**Suposición básica 1**

- a. La función de tipo  $g(x)$  de las ecs. (3) y (2) es una función acotada tal que:  $\forall t > T : g(x_p(t)) = g_p, g(x(t)) = g$ .
- b. Existe un número positivo  $q$  tal que:  $g_p - g = q \in R$ . Donde  $g_p$  y  $g$  son los valores máximos de dichas funciones, ver ejemplo ilustrativo en figura siguiente.
- c. Existe una función  $v(x)$  tal que  $g(x) : g(x_i) = g_i - v(x_i)$ .

La suposición 1 no es muy estricta para el caso de sistemas en los cuales se tiene un tipo de estabilidad marginal, como es el caso de los sistemas biológicos o químicos, ya que éstos presentan cierta estabilidad marginal natural, y lo único que se requiere es llevar al sistema a otro punto de operación, como es el caso tratado en este trabajo.

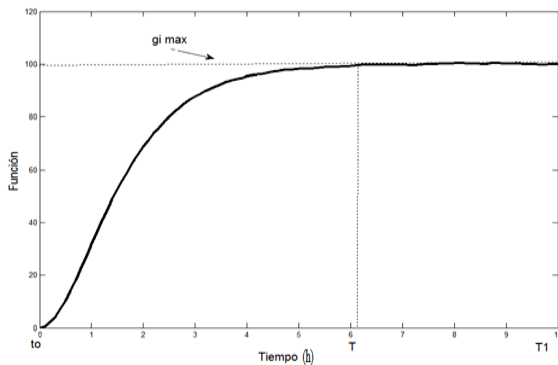


Fig. 2. Función acotada a lo largo del tiempo.

**Suposición básica 2**

La distorsión es una función acotada  $\|\delta(t, x_p, I_{dis})\| \leq d$  y puede ser extendida a lo largo de  $R^n$  además es Lipschitz tal que  $\|\delta(t, x_{p,1}, I_{dis}) - \delta(t, x_{p,2}, I_{dis})\| \leq l \|x_{p,1} - x_{p,2}\|$  en  $R^n$  tal que  $\|x_p\| \gg \|\delta(t, x_p, I_{dis})\|$ , ver Aguilar y col. (2003).

**Suposición básica 3**

Sea un sistema perturbado como el mostrado en Ec. (3) y sea la diferencia entre Ec. (2) en su forma autónoma ( $g(x_p) = 0$ ) y Ec. (3), se dice que dicha diferencia es uniformemente acotada tal que

$$\begin{aligned} \Lambda(x, x_p, t) &= -f(x) + f(x_p) - g(x)u - \delta(t, x_p, I_{dis}) \\ \|\Lambda(x, x_p, t)\| &\leq h \quad \forall h \in R > 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Por lo que entonces el sistema Ec. (3) será nuestra planta de seguimiento óptima. A través del siguiente teorema se propone una ley de control tal que Ec. (1a) sigue la trayectoria propuesta.

**Teorema 1**

Sean los sistemas no lineales ecs. (2) y (3), ambos cumplen con las 3 suposiciones descritas anteriormente. La ley de control Ec. (5) estabiliza asintóticamente a la dinámica de error de seguimiento  $e = x - x_p$ , además la ley de control descrita en Ec. (5) es robusta a perturbaciones si la matriz de intercambio vista en la Ec. (6) es Hurwitz a través de los vectores fijos de ajuste de ganancias proporcional e integral ( $K_p$  y  $K_i$ , respectivamente) y el valor máximo de  $g(x_p)$  deseado.

$$\dot{u}_p = -K_p^T \dot{e} - K_i^T e \quad (5)$$

$$A = \begin{pmatrix} gK_p^T & g \\ K_i^T & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

**Prueba**

La matriz de intercambio (ver: Ec (6).) se define como la matriz de distribución de las ganancias proporcional e integral sobre el sistema no lineal representado en Ec.(2). Sea la derivada del error de seguimiento:

$$\begin{aligned} e &= x - x_p \\ \dot{e} &= \dot{x} - \dot{x}_p \end{aligned} \quad (7)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (7), se tiene que

$$\dot{e} = \Lambda(x, x_p, t) - g(x_p)u_p \quad (8)$$



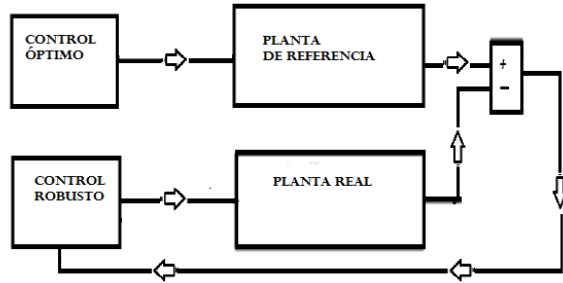


Fig. 3. Diagrama esquemático del control propuesto.

La ley de control Ec (5) sigue la misma estructura que la mostrada en (Alvares y col., 1986; Alvares y col., 1990), por lo que se sustituye por

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \Lambda(x, x_p, t) + g(x_p)(K_p e + w) \\ \dot{w} &= K_i e \end{aligned}$$

Por lo que el sistema extendido es el siguiente

$$\dot{\varepsilon} = A(g(x))\varepsilon + \Lambda_T \quad (9)$$

Donde  $\Lambda_T = \begin{pmatrix} \Lambda(x, x_p, t) & 0 \end{pmatrix}^T$  y  $\varepsilon = \begin{pmatrix} e & w \end{pmatrix}^T$ . Por la suposición 1, la matriz  $A(x_p)$  cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} A(x_p) &= \begin{pmatrix} g(x_p)K_p^T & g(x_p) \\ K_i^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} gK_p^T & g \\ K_i^T & 0 \end{pmatrix} + \Omega(x_p) \\ \Omega(x_p) &= \begin{pmatrix} (q - v(x_p))K_p^T & q - v(x_p) \\ K_i^T & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

Sustituyendo la Ec. (10) en la Ec. (9), se sigue que

$$\dot{\varepsilon} = A\varepsilon + \Lambda_T(\varepsilon, t) + \Omega(x_p)\varepsilon \quad (11)$$

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov y su derivada bajo las trayectorias del sistema Ec. (11)

$$\begin{aligned} V(t) &= \varepsilon^T P \varepsilon \\ \dot{V}(t) &= \dot{\varepsilon}^T P \varepsilon + \varepsilon^T P \dot{\varepsilon} \\ \dot{V}(t) &= (\varepsilon^T A^T + \Lambda^T(\varepsilon) + \varepsilon^T \Omega^T(x_p)) P \varepsilon \\ &\quad + \varepsilon^T P (A\varepsilon + \Lambda(\varepsilon) + \Omega(x_p)\varepsilon) \end{aligned} \quad (12)$$

Ya que  $A$  es Hurwitz por construcción entonces

$$\dot{V}(t) = \varepsilon^T (A^T P + PA)\varepsilon + 2\Lambda^T(\varepsilon)P\varepsilon + 2\varepsilon^T \Omega^T(x_p)P\varepsilon \quad (13)$$

Entonces  $A^T P + PA = -Q$ , para toda matriz  $Q > 0$ . Acotando superiormente Ec. (13) tal que

$$\begin{aligned} \|\Omega\| &= \max_t \|\Omega(x_p(t))\| = M \\ b &= 2h\lambda_{\max}\{P\}, a = M\lambda_{\max}\{P\} \end{aligned} \quad (14)$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\lambda_{\min}\{Q\}\|\varepsilon\|^2 + b\|\varepsilon\| + a\|\varepsilon\|^2 \\ &\leq -\lambda_{\min}\{Q\}\|\varepsilon\|\left(\|\varepsilon\| - \frac{b+a}{\lambda_{\min}\{Q\}}\right) \end{aligned}$$

Tal que si  $\lambda_{\min}\{Q\} \gg b + a$ , el sistema tendrá una última cota de estabilidad dada por la siguiente bola de convergencia, en el sentido descrito por (Khalil, 2002).

$$B_\varepsilon \triangleq \left\{ \|\varepsilon\| \in \mathbb{R}^n : \|\varepsilon\| < \frac{b+a}{\lambda_{\min}\{Q\}} \right\}$$

Por lo que el sistema es estable sobre una cota última definida por la definición anterior.

## 4 Diseño del controlador robusto para un fotobioreactor

En base a diferentes investigaciones anteriores, se sabe bien que la velocidad de crecimiento microbiano puede ser altamente perturbada en base a diferentes cambios en las variables de diseño, como la intensidad de iluminación, presión, temperatura, pH, entre otras (Bernar, 2011). En Domínguez y col. (2009) se propuso un experimento en donde se probó la sensibilidad paramétrica de la microalga *Spirulina maxima*. En base a estas investigaciones se propone un estudio de simulación a partir del hecho que el sistema puede presentar cambios paramétricos en cualquier instante. Para el caso de simulación se propondrán valores presentados en la Tabla 1; partiremos de uno de ellos como el nominal, es decir éste será el sistema de referencia, y se propondrá un control robusto tal que el error de seguimiento sea asintótico, incluso en presencia de incertidumbres en el modelo reflejadas en cambios paramétricos. Se propone el siguiente sistema de referencia.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{0.027sx}{25+s} - 0.018x \\ \dot{s} &= -\frac{1}{3.45} \frac{0.027sx}{25+s} - 0.018s + 3.09 \end{aligned} \quad (15)$$

El valor de 0.018 corresponde a la tasa de dilución óptima calculada en base al criterio dinámico de optimización, el cual es basado sobre el valor estacionario de la dinámica de referencia. En este trabajo se supone que dicha dilución óptima es constante y sin perturbaciones (Domínguez y col., 2009). El valor de 3.009 de Ec. (15) corresponde a la tasa de dilución óptima por la concentración de

sustrato alimentado de la planta, el cual tiene unidades de (mg/L\*s).

El problema fundamental radica en encontrar y escoger adecuadamente los valores de las matrices de ganancia proporcional  $K_p$  e integral  $K_i$ , así como el valor de  $g_p$  del sistema, talque la matriz de intercambio  $A$  mostrada en la Ec. (6) sea Hurwitz y permita encontrar una solución de la ecuación matricial de Lyapunov  $AT^P + P^T A = -Q$ , como se mostró en el Teorema 1. El valor propio de la matriz  $Q$  debe ser lo suficientemente grande para una  $P > 0$  simétrica y arbitraria. Para este caso particular, el vector  $g_p$  tiene la siguiente estructura:

$$g_p = \begin{pmatrix} g_{p1} \\ g_{p2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_{1,est} \\ -x_{2,est} + a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -598 \\ 172.68 \end{pmatrix}$$

$$K_p = \begin{pmatrix} k_{p1} \\ k_{p2} \end{pmatrix} \quad K_i = \begin{pmatrix} k_{i1} \\ k_{i2} \end{pmatrix}$$

El vector  $g_p$  de la Ec. (15) fue obtenido del análisis dinámico en sentido de la Suposición 1, (ver Fig. 1). El cálculo de la *matriz de intercambio*  $A$ , es el siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} g_p K_p^T & g_p \\ K_i^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{p1} k_{p1} & g_{p2} k_{p1} & g_1 \\ g_{p1} k_{p2} & g_{p2} k_{p2} & g_2 \\ k_{i1} & k_{i1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -598 k_{p1} & -598 k_{p1} & -598 \\ 172.6 k_{p2} & 172.6 k_{p2} & 172 \\ k_{i1} & k_{i1} & 0 \end{pmatrix}$$

Si se escoge  $K_p = [1 \ 5]^T$  y  $K_i = [1 \ 1]^T$  y la matriz de alta ganancia  $Q = I * 10000$ . La *matriz de intercambio*  $A$  tiene los siguientes valores propios: (-2.07+6.06i,-2.07-6.06i,-0.1003). Por lo que la matriz  $P > 0$ ; dado que todos sus valores propios son reales positivos, esto es (223.55,35,9.5).

$$P = \begin{pmatrix} 207 & -14.6 & -50.9 \\ -14.6 & 10.93 & 0.79 \\ -50.7 & 0.79 & 0.79 \end{pmatrix}$$

Con los valores de  $K_p$  y  $K_i$  escogidos se asegura que el error de seguimiento tendrá que ser asintóticamente estable, ya que la matriz de intercambio  $A$  es Hurwitz y se ocupó una matriz de alta ganancia  $Q$  en el cálculo de la matriz definitiva positiva  $P$ , todo esto en el sentido del Teorema 1. La simulación se desarrolla en lenguaje *Matlab Simulink*, se plantea el problema de diseño de una ley de control, la cual sea robusta a perturbaciones paramétricas definidas anteriormente. Se plantea el hecho de que el sistema a controlar debe seguir al de

referencia Ec. (15), con una ley de control  $u_c$ , en base a Teorema 1:

$$\dot{x} = \frac{0.027sx}{25+s} - u_c(t)x$$

$$\dot{s} = -\frac{1}{3.45} \frac{0.027sx}{25+s} - u_c(t)s + 3.09 \quad (16)$$

$$u_c = e_1 - 5e_2 - \left( \int e_1 dt - \int e_2 dt \right)$$

Se plantean 1500 horas de simulación, dado que este tipo de sistemas es lento, y se plantea que cada 500 horas el sistema cambia de parámetros de *Monod*, (véase Tabla 1). Se agregó ruido de tipo gaussiano para dar más realismo a nuestra simulación, dado que la gran mayoría de sensores analógicos provocan este tipo de ruido estocástico.

Es fácil notar que a través de la Figs. (4) y (5) (ver al final de esta sección), el control cumple con su función de dar robustez el sistema, dado que aún a pesar de la presencia de ruido y perturbaciones paramétricas, el sistema sigue de manera deseable al sistema de referencia. Después de las 500 h de simulación, se presentan las perturbaciones paramétricas, las cuales son rechazadas en tiempo real.

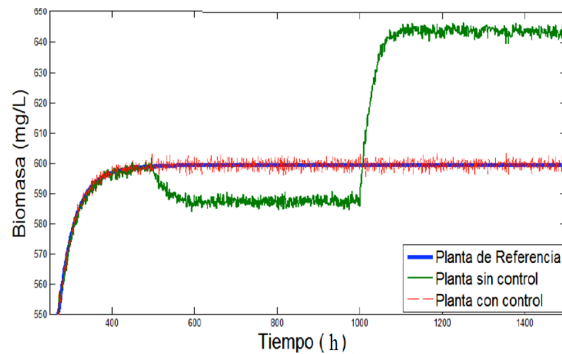


Fig. 4. Dinámica de la biomasa en lazo abierto y cerrado

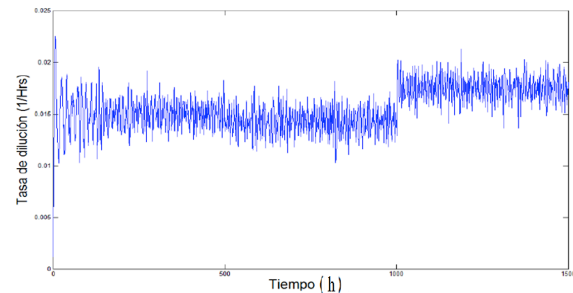


Fig. 5. Perfil de la señal de control enviada al actuador.

## Conclusiones

En este trabajo se presenta una potente aplicación de la teoría de control en el uso en las ciencias de la vida. Se demuestra, bajo el concepto de Lyapunov, una ley de control de tipo PI aplicada a un tipo de sistemas no lineales, que muestran las condiciones de sintonización robusta para alcanzar una última cota de estabilidad probada en la demostración del Teorema 1, esto para sistemas con estados estacionarios conocidos. Aún a pesar de tener incertidumbres paramétricas y ruido a lo largo del tiempo, el control mostró una buena robustez a dichas distorsiones, como se mostró en el ejemplo numérico en este trabajo. Este tipo de control es idóneo para sistemas con incertidumbre en el modelo matemático, en un caso particular como en el diseño de bioreactores.

## Agradecimientos

Agradecemos al editor y a los revisores por el tiempo tomado en la revisión del presente trabajo, así como al gobierno de México que a través del Conacyt por proveer una beca de doctorado al primer autor para finalizar dichos estudios profesionales. Se agradece a su vez a la UMI-LAFMIA Cinvestav y al Instituto Tecnológico Nacional de México por el apoyo para realizar este trabajo.

## Referencias

- Aguilar R., González J., Barrón M. , Martínez-Guerra R. y Maya-Yescas R.(2001). Robust PI<sup>2</sup> controller for continuous bioreactors. *Process Biochemistry* 36, 1007-1013.
- Aguilar R., Martínez-Guerra R. y Maya-Yesca R. (2003). State estimation for partially unknown nonlinear systems: a class of integral high gain observers. *IEEE Process Control Theory Applications* 3, 240-244.
- Aguilar R., Soto G., Martínez S. y Maya-Yescas R. (2004). Substrate regulation in fixed bed bioreactor via feedback control. *Revista Mexicana de Ingeniería Química* 3, 1-11.
- Álvarez J., Álvarez J. y González E. (1989). Global nonlinear control of a continuous stirred tank reactor. *Chemical Engineering Science* 44, 1147-1160.
- Alvarez J., Suarez R. y Sanchez A. (1990). Nonlinear decoupling control of free-radical polymerization continuous stirred tank reactors. *Chemical Engineering Science* 45, 3341-3357.
- Alvarez-Ramirez J. y Morales A. (2000). PI control of continuously stirred Tank reactors: stability and performance. *Chemical Engineering Science* 55, 5497-5507.
- Bastin G. y Dochain D. (1990). *On-line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors*. Editorial Elsevier, Estados Unidos de América.
- Bernard O. (2011). Hurdles and challenge for modeling and control of microalgae for CO<sub>2</sub> mitigation and biofuel production. *Journal of Process Control* 21, 1378-1389.
- Bourriot, S., Garnier, C. y Doublier, J.L. (1999). Phase separation, Theology and microstructure of micellar casein-guar gum mixtures. *Food Hydrocolloids* 7, 90-95.
- Bulsari. (1995). *Neural Networks for Chemical Engineers*, Editorial Elsevier, Amsterdam, Holanda.
- Cañizares R.O., Rivas L., Montes. L. y Domínguez A.R. (2004). Aerated swine-wastewater treatment with K-carrageenan-immobilized *Spirulina maxima*. *Bioresource Technology* 47, 89-91.
- Domínguez A.R. y Torres J. (2009). Estudio teórico de la remoción de contaminantes presentes en el río de Los Remedios, Estado de México. *Ingeniería Hidráulica en México* 24, 81-91.
- Hussain H. (1999). Review of the applications of neural networks in chemical process control and simulation and online implementation. *Artificial Intelligence in Engineering* 13, 55-68.
- Johnson A. (1987). The control of fed-batch fermentation processes-A survey. *Automatica* 23, 691-705.
- Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*, Tercera edición, Prentice Hall, New Jersey, Estados Unidos de América.
- Latrille E., Corrieu G. y Thibault J. (1994). Neural network models for final process time determination in fermented milk production. Presentación Noviembre-Diciembre 1994,



- European Symposium on Computer Aided Process Computers 8, 1171-1181.
- Lee J., Lee J., Park S. y Middelberg A. (1999). Control of fed-batch fermentations. *Biotechnology Advances* 7, 29-48.
- Notie J. y Bassdres A. (1994). Biotreatment of anaerobically digested swine manure with microalgae. *Biological Wastes* 29, 17-31.
- Olguín E., Galicia S., Mercado G. y Pérez T. (2003). Annual productivity of *Spirulina* (*Arthrospira*) and nutrient removal in a pig wastewater recycling process under tropical conditions. *Journal of Applied Phycology* 15, 249-257.
- Oswald W.J. (2001). Introduction to advanced integrated wastewater ponding systems. *Water Science and Technology* 24, 1-7.
- Radhakrishnan T.K., Sundaram S. y Chidambaram M. (1999). Non-linear control of continuous bioreactors. *Bioprocess Engineering* 20, 173-178.
- Ramírez-Mérida LG, Ragagnin de Menezes C, Zepka LQ y Jacob-Lopes E. (2015). Microalgas: potencial para la producción de compuestos bioactivos nanoencapsulados. *Ciência e Natura* 37, 7-17.
- Ramírez-Mérida LG, Zepka L. y Jacob-Lopes E. (2015). Current status, future developments and recent patents on photobioreactor technology. *Recent Patents on Engineering* 9, 80-90.
- Raposo, M. , Morais y R. Morais, A. (2013). Health applications of bioactive compounds from marine microalgae. *Life Sciences* 93, 479-486.
- Ruiz-Leza H., Rodríguez-Jasson R.N., Rodríguez-Herrera, Contreras-Esquivel J.C. y Aguilar C.N. (2007). Diseño de bioreactores para fermentación en medio sólido. *Revista Mexicana de Ingeniería Química* 1, 33-10.
- Sanchez A., Alvarez J. y Suarez R. (1989). Control robusto no lineal de un reactor continuo de polimerización. *Avances en Ingeniería Química*, 769-780.
- Schaum A., Alvarez J. y Lopez-Arenas T. (2012). Saturated PI control of continuous bioreactors with Haldane kinetics. *Chemical Engineering Science* 68, 520-529.
- Travieso L., Sánchez E. y Bora R. (2004). Evaluation of laboratory and full-scale microalgae pond for tertiary treatment of piggery wastes. *Environmental Technology* 25, 565-576.
- Ullmann A. (1950). Selected Papers in Molecular Biology. En : La technique de cultures continues; théorie et applications, (Monod J.) Pp. 184-204. *Annals de l'Institute Pasteur*, Paris, France.